Maksimalaus srauto konstravimas

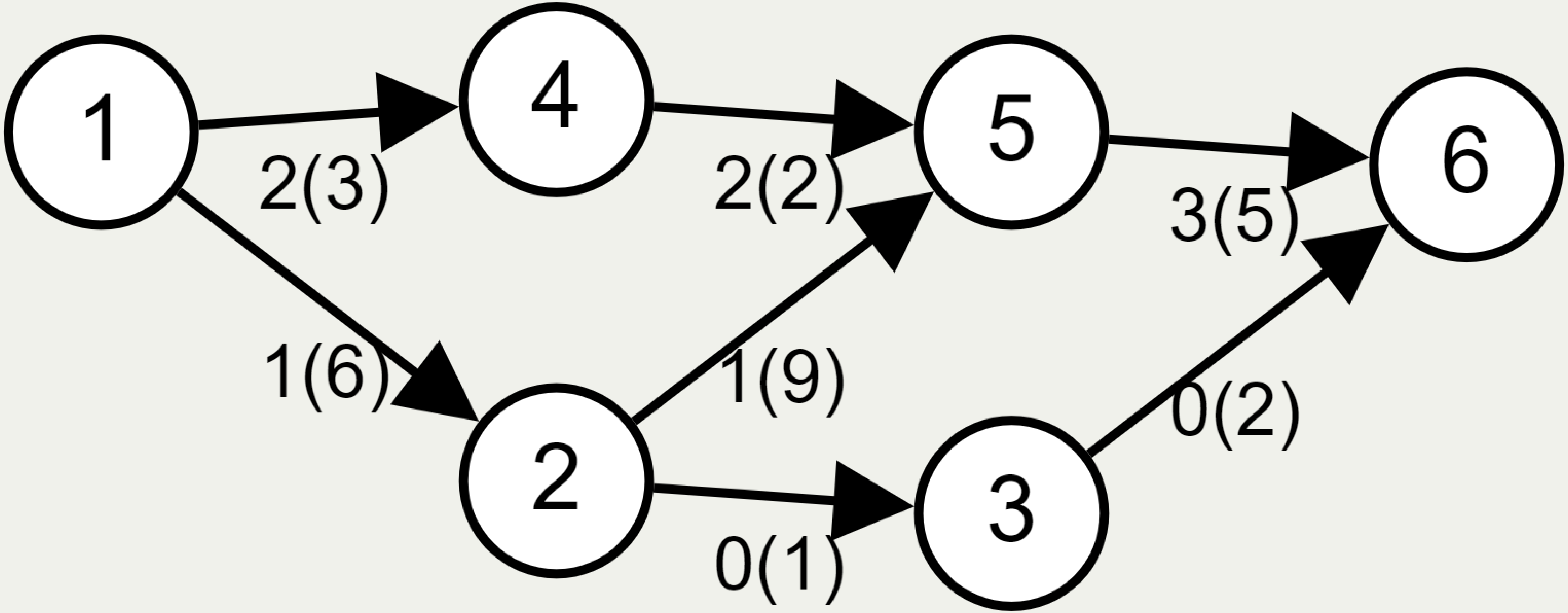
Parengė Vytautas Strimaitis, PS 4 k.

Didinančiosios grandinės

- Tinklo S lankas e iš u į v yra vadinamas **leistinuoju** lanku srauto f atžvilgiu, jeigu $e = (u, v)$ ir $f(e) < c(e)$ arba $e = (v, u)$ ir $f(e) > 0$
- Pirmuoju atveju lankas vadinamas **suderintuoju**, o antruoju - **nesuderintuoju**.

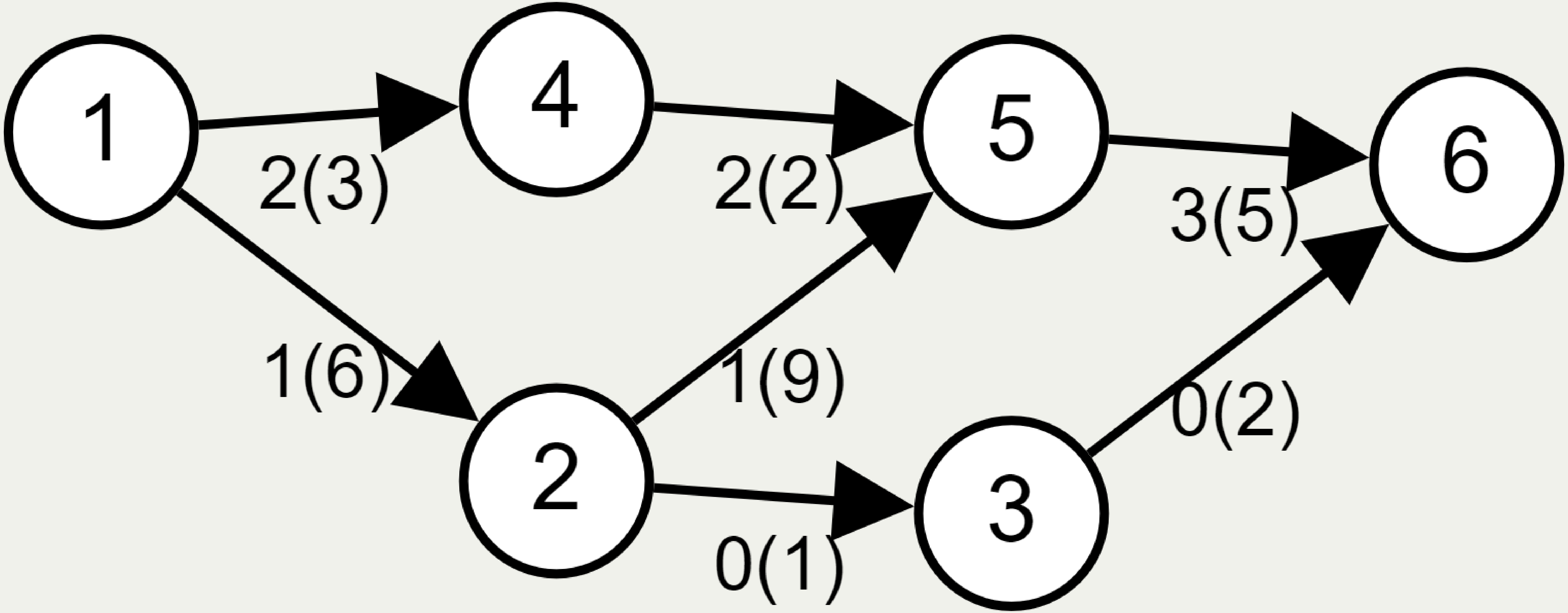
Didinančiosios grandinės

Kurie grafo lankai yra suderinti, o kurie - nesuderinti?



Didinančiosios grandinės

Suderinti: $(1,2)$, $(1,4)$, $(2,3)$, $(2,5)$, $(3,6)$, $(5,6)$. **Nesuderinti:** $(4,5)$

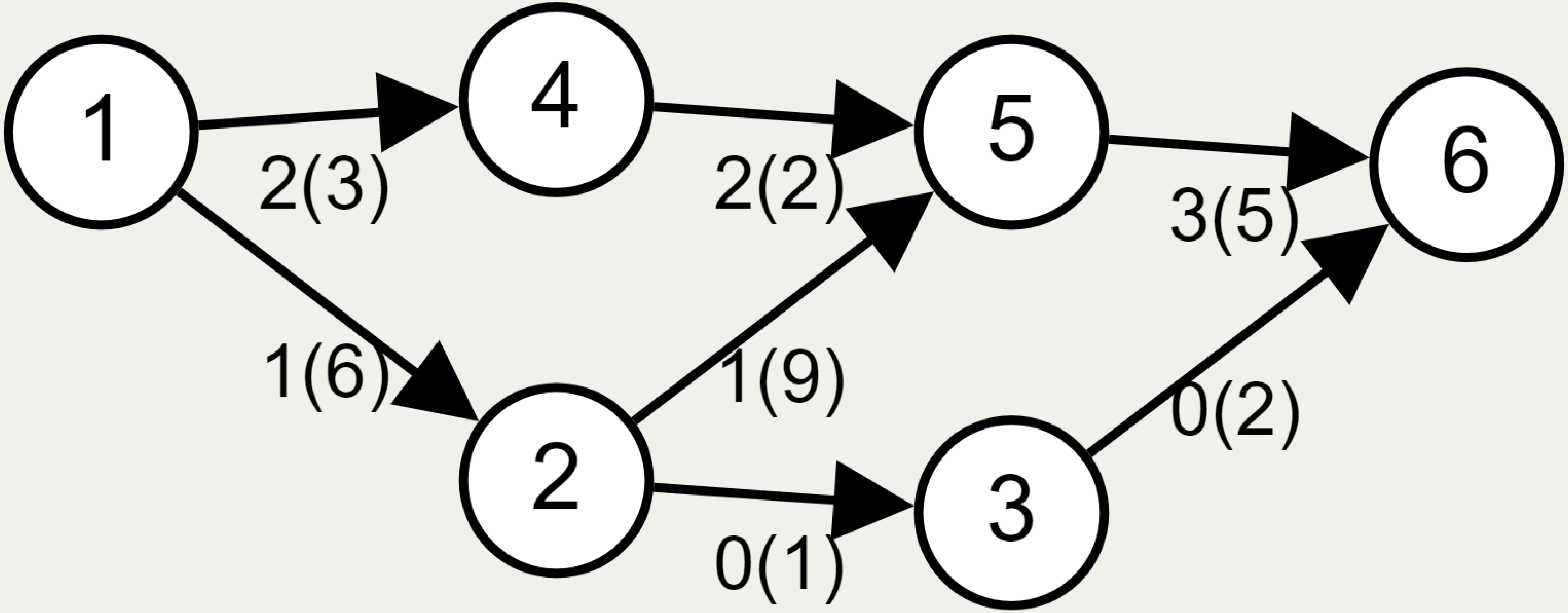


Didinančiosios grandinės

- Ilgio l didinančioji grandinė iš s į t srauto f atžvilgiu yra seka, sudaryta iš besikeičiančia tvarka surašytų viršūnių ir lankų:
$$v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \ldots, v_{l-1}, e_l, v_l.$$
- Čia $v_1 = s$, $v_l = t$ ir $\forall 1 \leq i \leq l$ lankas e_i srauto f atžvilgiu yra leistinasis lankas iš v_{i-1} į v_i.

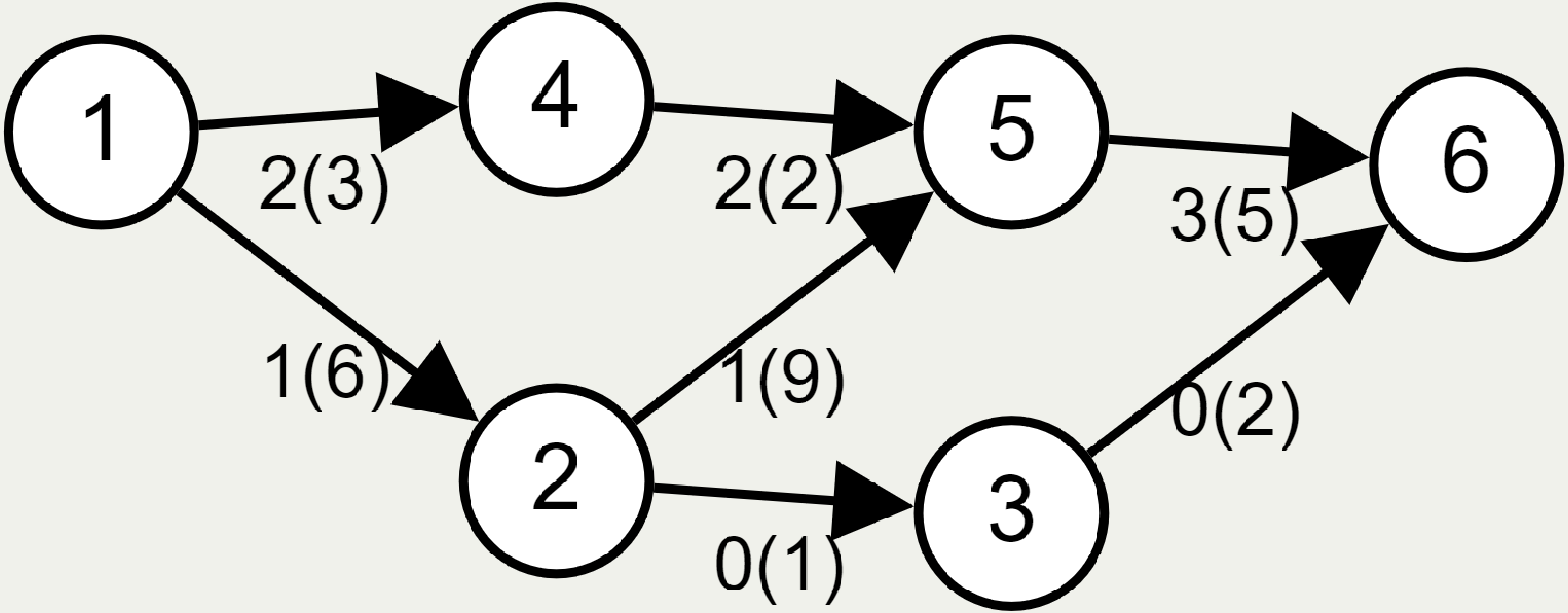
Didinančiosiosios grandinės

Raskite didinančiąsias grandines šiame grafe.



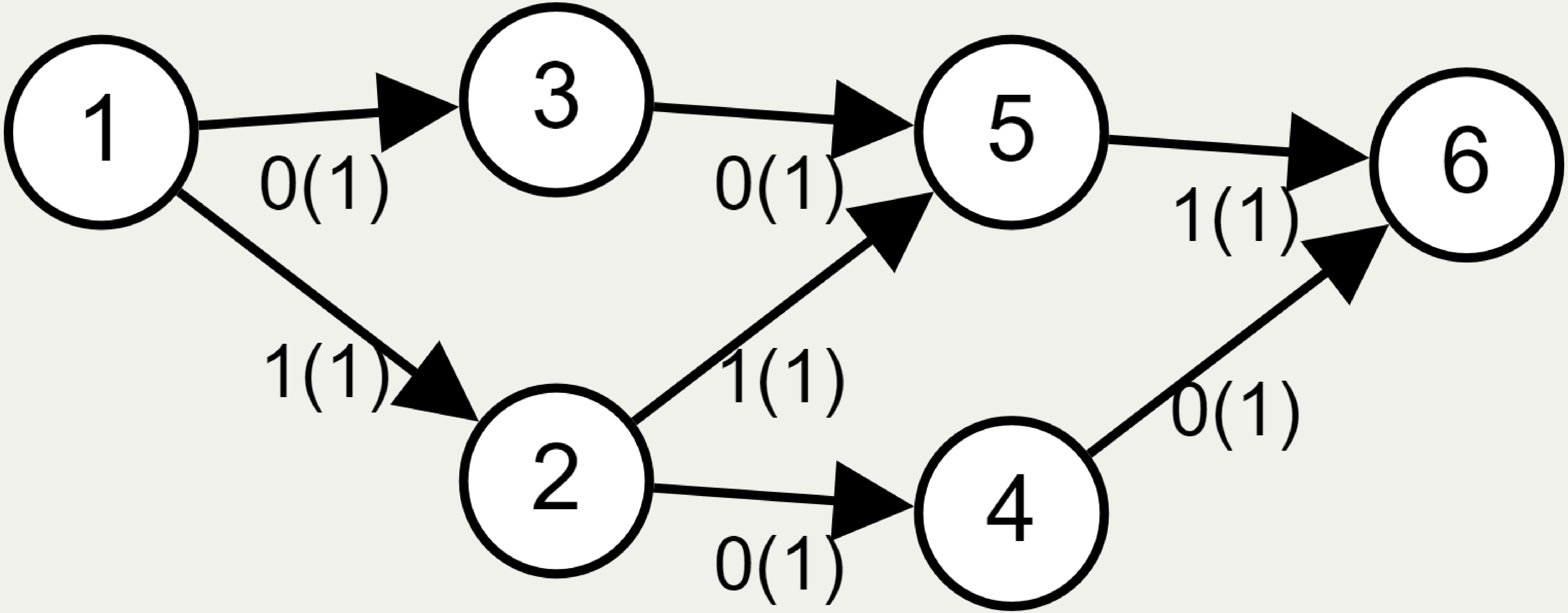
Didinančiosios grandinės

$1, (1, 2), 2, (2, 3), 3, (3, 6), 6$ ir $1, (1, 2), 2, (2, 5), 5, (5, 6), 6.$



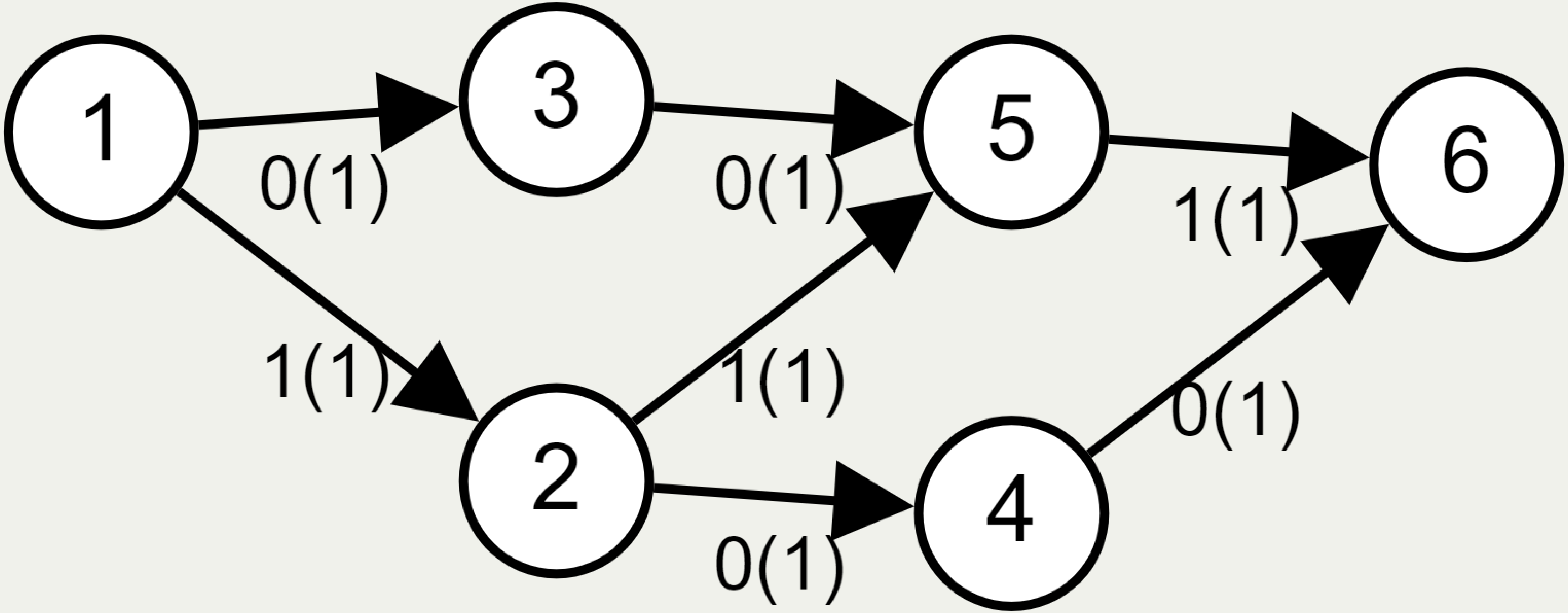
Didinančiosios grandinės

Raskite didinančiąsias grandines šiame grafe.



Didinančiosios grandinės

$$1,(1,3),3,(3,5),5,(5,2),2,(2,4),4,(4,6),6.$$

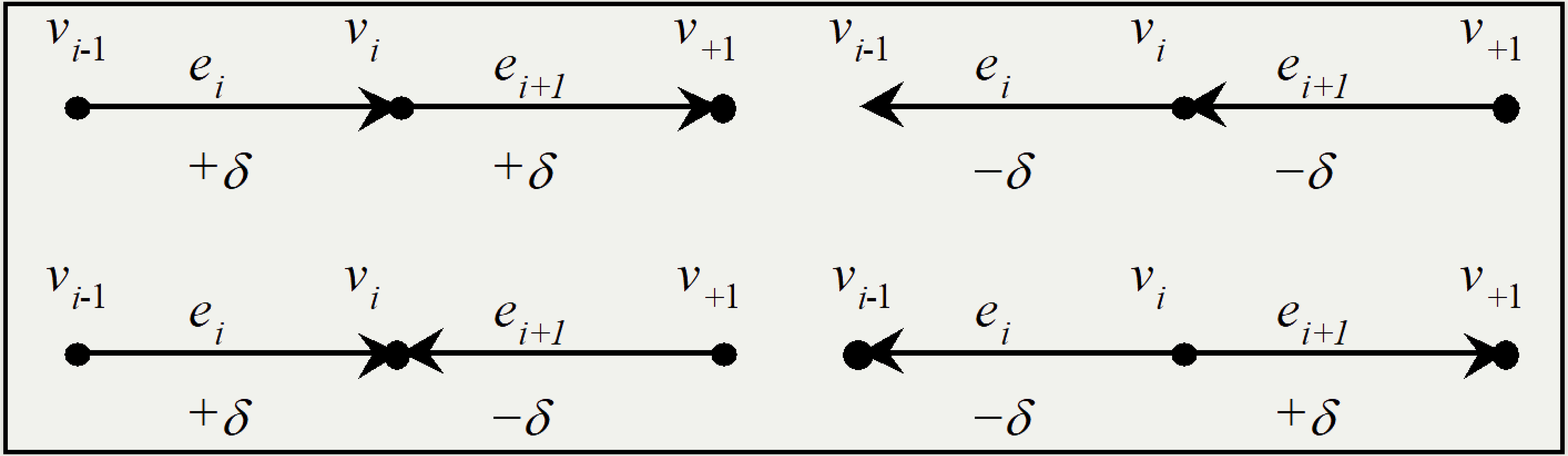


Didinančiosios grandinės

- Žinodami tam tikrą didinančią grandinę, srautą f galime padidinti dydžiu $\delta = \min\{\Delta(e_i), 1 \leq i \leq l\}$.
- Jei e_i yra suderintasis lankas, tai $\Delta(e_i) = c(e_i) - f(e_i)$.
- Jei e_i yra nesuderintasis lankas, tai $\Delta(e_i) = f(e_i)$.
- Žinodami reikšmę δ konkrečiai didinančiai grandinei, galime šį dydį pridėti prie kiekvieno šios grandinės lanku tekančio srauto (jei lankas nesuderintasis - reikia atimti).

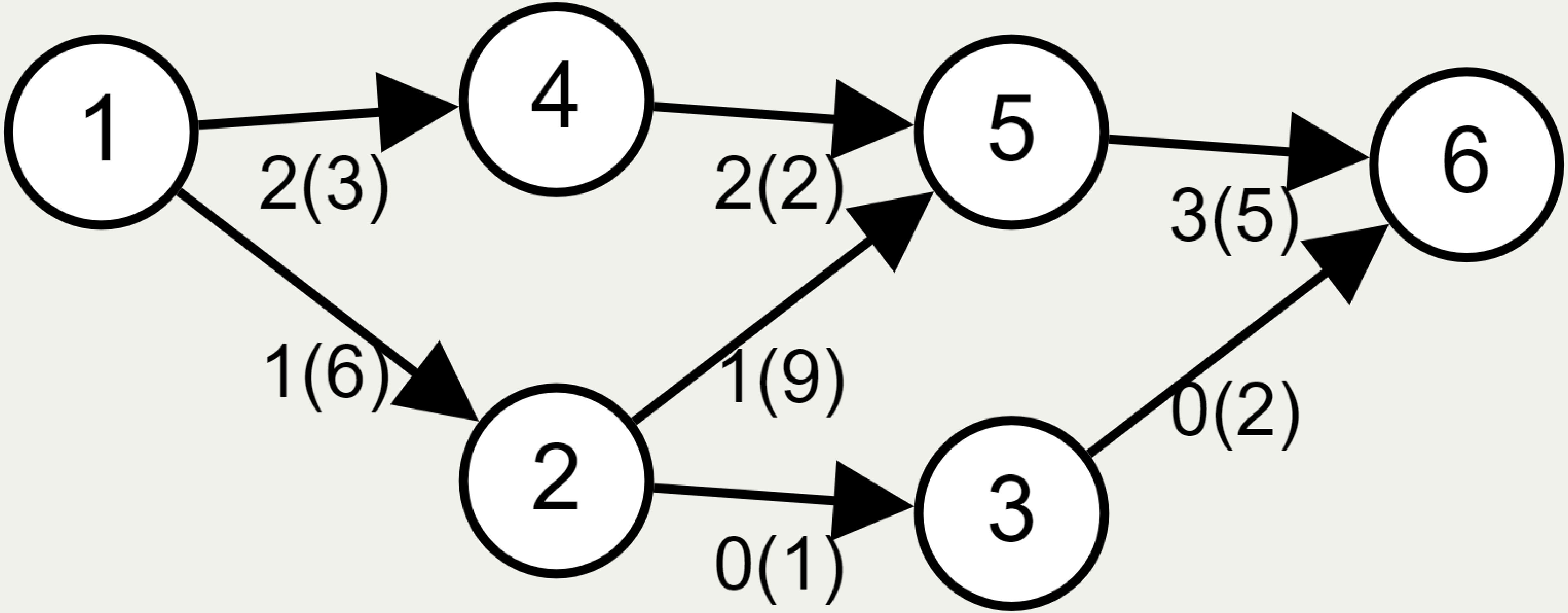
Didinančiosios grandinės

Kodėl naujai apskaičiuota funkcija f' vis dar yra srautas? Nesunku įsitikinti, kad vis dar galios sąlyga $0 \leq f'(e) \leq c(e)$. Panagrinėkime, kaip keičiasi divergencija.



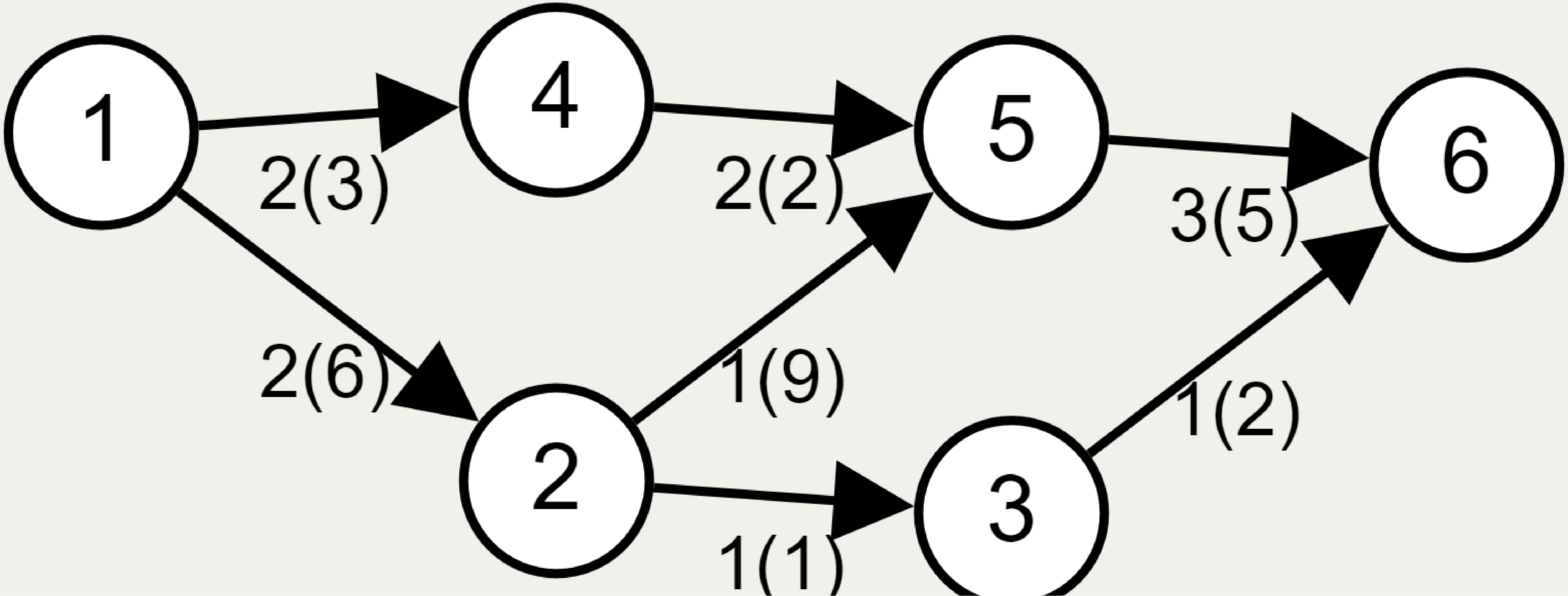
Didinančiosios grandinės

Padidinkite srautą didinančiojoje grandinėje $1, (1, 2), 2, (2, 3), 3, (3, 6), 6$.



Didinančiosios grandinės

$\delta = \min\{6-1, 1-0, 2-0\} = \{5,1,2\} = 1$. Padidinus srautą grafas atrodo taip:



Algoritmo teorinis pagrindimas

Teorema. Šios trys sąlygos yra ekvivalenčios:

1. Srautas iš s į t yra maksimalus.
2. Neegzistuoja didinančios grandinės srauto f atžvilgiu.
3. Egzistuoja pjūvis, kurį nusako toks viršūnių poaibis A, skiriantis viršūnes s ir t, kad $W(f) = c(A, V \setminus A)$.

Įrodymas $1 \Rightarrow 2$

- Jei srautas maksimalus, tai didinanti grandinė niekaip negali egzistuoti.
- Jei didinanti grandinė egzistuotų, tai ja pasinaudojus būtų galima padidinti srautą, bet tai reikštų, kad srautas nebuvo maksimalus.

Įrodymas $2 \Rightarrow 3$

- Tarkime, kad srautui f neegzistuoja didančiosios grandinės.
- Tegu A - viršūnių aibė, kurią sudaro visos viršūnės, iki kurių egzistuoja grandinė iš s, einanti tik per leistinus lankus.
- Šiai aibei tikrai priklauso s ir tikrai nepriklauso t (nes kitaip egzistuotų didinanti grandinė).
- Kiekvienam pjūvio suderintam lankui privalo galioti lygybė $f(e) = c(e)$, nes kitaip būtų galima praplėsti aibę A. Todėl $f(A, V \setminus A) = c(A, V \setminus A)$.
- Analogiškai, kiekvienam pjūvio nesuderintam lankui privalo galioti lygybė $f(e) = 0$. Todėl $f(V \setminus A, A) = 0$.
- Iš čia $W(f) = f(A, V \setminus A) - f(V \setminus A, A) = c(A, V \setminus A)$.

Įrodymas $3 \Rightarrow 1$

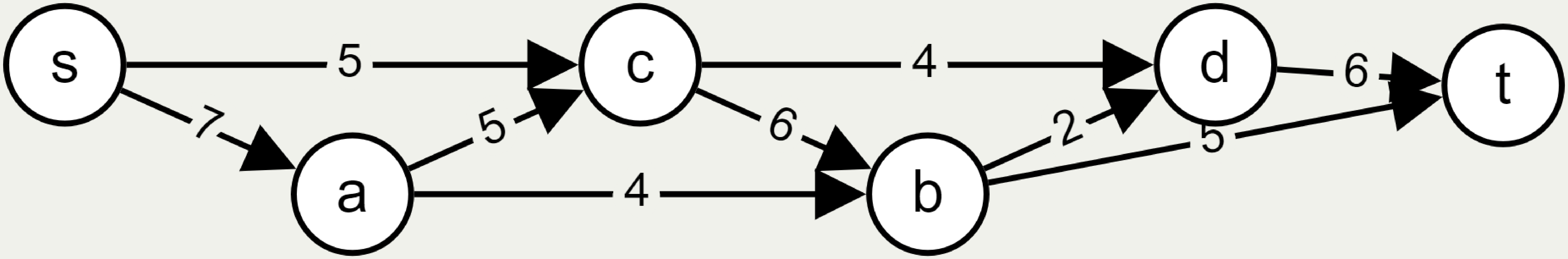
- Srauto dydis negali viršyti $c(A, V \setminus A)$.
- Kadangi $W(f) = c(A, V \setminus A)$, tai srautas f yra maksimalus.

Ford-Fulkerson algoritmas

- Pradėkime nuo nulinio srauto.
- Raskime bet kokią didinančią grandinę.
- Jei grandinė neegzistuoja, tai srautas maksimalus ir galime algoritmą baigti.
- Kitu atveju srautą didiname ir kartojame iš naujo.

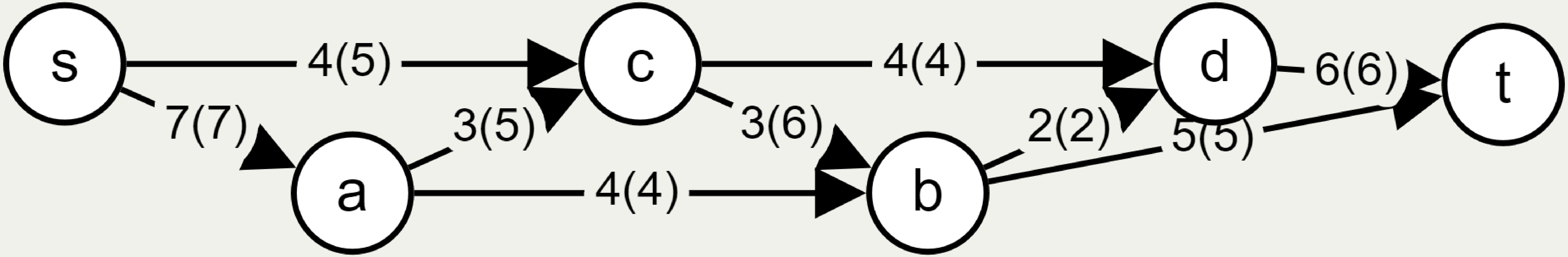
Užduotis

Raskite maksimalų srautą duotame grafe pasitelkę Ford-Fulkerson algoritmą.



Atsakymas

Maksimalus srautas: 11.



Ar algoritmas visada baigia darbą?

- Viskas priklauso nuo to, kaip bus renkamos didinančios grandinės.
- Yra įrodyta, kad egzistuoja tinklų, kuriuose galima taip parinkinėti grandines, kad procesas niekada nesibaigs. Tačiau praktikoje tokių atvejų beveik nepasitaiko.
- Edmonds'as ir Karp'as įrodė, kad parinkinėjant didinančias grandines paieškos į plotį tvarka (t.y. renkant mažiausiai lankų turinčias grandines), algoritmas visada baigs darbą ir maksimalus srautas bus sukonstruotas per ne daugiau kaip $\frac{mn}{2}$ grandinių.